**Tugas Pengayaan 1**

**Dinamika Geofisika Fluida**

Dinamika geofisika fluida (DGF) adalah teori gerak fluida dalam skala besar dan alirannya berreluensi rendah (periode panjang). Beberapa fenomena di lautan dan atmosfir yang termasuk dalam kajian DGF adalah El Nino dan La Nina, sirkulasi angin, sirkulasi gyre, sirkulasi arus global, sirkulasi termohalin dan arus teluk. Gaya Coriolis memegang peranan yang sangat penting dalam DGF. Faktor rotasi dan stratifikasi sangat diperhitungkan dalam DGF. Suatu aliran fluida dengan periode lama akan terpengaruh oleh rotasi. Rotasi menyebabkan timbulnya gaya coriolis dan sentrifugal. Pengaruh stratifikasi berperan dalam perbedaan densitas sehingga gaya gravitasi memiliki pengaruh yang besar. Pengaruh rotasi bumi ditentukan dari besarnya bilangan rossby (. Bilangan rossby merupakan perbandingan dari advective time scale L/U dan skala waktu rotasi bumi ().

Nilai bilangan Rossby ( dirumuskan sebagai berikut,

L= Panjang arah horizontal (m)

U= Kecepatan aliran fluida (m/s)

= Kecepatan sudut rotasi bumi (rad/s)

Apabila maka fenomena tersebut dipengaruhi rotasi bumi. Apabila maka rotasi bumi tidak berpengaruh terhadap fenomena tersebut. Kerangka inersia yang sering disebutkan dalam DGF merupakan kerangka tetap dalam perut bumi.

**Gaya Coriolis**

Gaya coriolis merupakan gaya yang ditimbulkan akibat rotasi bumi. Gaya coriolis disebabkan adanya gerak semu karena pengamat ikut dalam pergerakan rotasinya. Koordinat absolute merupakan koordinat dengan pengamat berada di luar koordinat tersebut. Koordinat berotasi merupakan koordinat dimana pengamat ikut berotasi.

**TUGAS BACA**

**MATEMATIKA VEKTOR & PDP**

**Vectors and Cartesian Tensors**

Besaran yang sering digunakan dalam DGF dikategorikan sebagai scalar, vector atau tensor. Berikut merupakan contoh besaran tersebut.

Scalar : α, s, T

Vector : **V, a, F**

Tensor :

Operasi yang digunakan untuk besaran scalar, vector dan tensor dapat dilihat dibawah ini.

(b)(B) = scalar

**nF** = scalar

= vector

= scalar

Orde hasil operasi diatas ditentukan dengan ketentuan dalam table dibawah ini :

|  |  |
| --- | --- |
| Multiplication type | Order of result |
| None | ∑ |
|  | ∑-1 |
|  | ∑-2 |
| : | ∑-4 |

∑ adalah penjumlahan dari orde yang digunakan dalam persamaan.

**Penulisan Notasi Vektor**

Vector V pada titik P dalam notasi vector klasik ditulis sebagai, V = V1I1 + V2I2 + V3I3. Dalam notasi standar index i, j dan k digunakan sebagai unit vector untuk sumbu kartesian x, y dan z sehingga V=Vxi+Vyj+Vzk. Unit vector I1, I2, dan I3 setara dengan I,j dan k. kesetaraan notasi-notasi tersebut dijelaskan dengan menggunakan gambar dibawah ini.

0

x

y

z

j

k

i

P

V

0

X1

X2

X3

I2

I3

I1

P

V

**Delta Kronecker dan Unit Tensor Percepatan**

Delta kronecker dan unit tensor percepatan merupakan dua tensor yang sering digunakan dengan notasi khusus.

Delta kronecker didefinisikan sebagai,

1 jika i=j

δij = 0 jika i≠j atau δij =

Sedangkan unit tensor percepatan didefinisikan sebagai

+1 jika ijk = 123, 231,312 (ketiganya berbeda dan permutasi genap dari 123

∈ijk = -1 jika ijk = 321, 132,213 (ketiganya berbeda dan permutasi ganjil dari 123

0 jika terdapat sedikitnya dua indeks yang sama

**Penjumlahan dan pengurangan vector dan tensor**

Penjumlahan dan pengurangan vector dan tensor dapat dilihat pada gambar dibawah ini.

**U**

**-U**

**U**

Sehingga dalam bentuk matematis dapat dituliskan sebagai,

Vij….±Uij…. = Wij….

Vij, Uij dan Wij memiliki orde yang sama.

**Hasil operasi dot dua vektor**

Operasi dot antara vector V dan U akan menghasilkan scalar. Dot produk kedua vector tersebut didefinisikan sebagai

VU=

merupakan magnitude vector U dan V. Nilai magnitude vector V ()1/2 dan vector U ()1/2 dan merupakan sudut antara V dan U.

**Hasil cros dua vector**

Operasi cros dari vektor V dan U akan menghasilkan vector lain (W). Operasi cros V dan U didefinisikan sebagai,

**Gradien bidang scalar**

Gradien fungsi scalar dirumuskan sebagai,

Del ( merupakan suatu vektor operator yang tidak dapat berdiri sendiri.

**Divergensi Vektor**

Divergensi suatu vector dirumuskan sebagai:

**Fungsi Curl dari vektor posisi**

Curl dari vektor posisi didefinisikan sebagai,

Dari perumusan diatas curl dapat disebut sebagai cross product dari .

**PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL**

Persamaan diferensial parsial penting untuk menjelaskan keadaan fisis. PDP tidak terbatas pada masalah fisik saja tetapi juga penting dalam bidang sains dan teknologi. PDP diseleseikan sesuai dengan persamaan dan jenis PDP itu sendiri. Berikut merupakan klasifikasi jenis PDP.



Keterangan untuk A, B, dan C adalah fungsi dari *x* dan *t*. *D* adalah fungsi dari *u* dan turunan  serta *x* dan *t*. Klasifikasi jenis PDP ditentukan oleh nilai diskriminan (B2-4AC).

**PDP Eliptik**

Syarat suatu PDP dikatakan eliptik adalah apabila memenuhi syarat



**PDP Parabolik**

Syarat suatu PDP dikatakan parabolic adalah apabila memenuhi syarat



Pada PDP parabolic nilai awal dan syarat batas harus diketahui.

**PDP Hiperbolik**

Syarat suatu PDP dikatakan Hiperbolik adalah apabila memenuhi syarat



**GAYA CORIOLIS**

Gaya coriolis merupakan gaya semu yang disebabkan oleh pergerakan rotasi bumi. Gaya rotasi menyebabkan sebuah benda dibelokan kea rah kanan di belahan bumi utara dan dibelokan kearah selatan di belahan bumi selatan.

1. Kerangka acuan rotasi

Persamaan pembangun geofisika fluida umumnya dibuat dalam kerangka acuan inersia akan tetapi pengamatan dilakukan dalam suatu system yang berotasi. Kondisi tersebut menuntut persamaan kembalidibangun dalam system kerangka acuan yang berotasi.

Sumbu X dan Y terbentuk di kerangka acuan inersia, sumbu x dan y berada pada kerangka acuan yang sama tetapi berotasi dengan Ω. Unit vector dari masing-masing kerangka acuan ditandai dengan (I,J) dan (i,j). Perhatikan gambar berikut ini (Gambar 1).



Gambar 1. Kerangka acuan tetap dan kerangka acuan berotasi

Pada setiap waktu, t berotasi dari sumbu x membentuk sudut Ω dengan sumbu X, sehingga,



Posisi vektor  adalah,



Apabila persamaan diatas diturunkan terhadap t, maka didapatkan persamaan kecepatan,



Kedua persamaan kecepatan tersebut merupakan komponen kecepatan relative



Sama dengan menggunakan prosedur diatas maka komponen kecepatan absolute, 

Hubungan antara kecepatan absolute dan relative dituliskan sebagai berikut :



Turunan kedua terhadap waktu akan menghasilkan,





dengan Ω adalah percepatan coriolis, sedangkan Ω2 adalah percepatan sentrifugal.

1. Gaya sentrifugal

Gaya sentrifugal merupakan gaya yang timbul dari rotasi dengan arah keluar bidang rotasi. Gaya sentrifugal dipengaruhi kecepatan rotasi dan jarak partikel dari sumbu rotasi. Gaya sentrifugal di bumi dinetralkan oleh gaya gravitasi. Kondisi ini menjaga benda yang ada di bumi tidak terlempar keluar. Gaya gravitasi cukup besar, sehingga pertambahannya dengan gaya sentrifugal akan menghasilkan resultan gaya ke arah intermediate yang sama dengan arah kecepatan local. Batuan dan magma bumi yang tidak homogeny menyebabkan gaya gravitasi tidak selalu diarahkan ke pusat bumi. Kondisi yang sama juga terjadi pada gaya sentrifugal yang tidak selalu diarahkan ke permukaan kutub bumi. Gaya gravitasi yang tidak seragam ini telah mengubah bentuk permukaan bumi sampai total gaya gravitasi tegak lurus permukaan bumi.



Gambar 2. Resultan gaya gravitasi dan sentrifugal.

1. Gerak bebas pada bidang rotasi

Partikel bebas tanpa ada gaya external digunakan untuk menjelaskan pengaruh gaya coriolis. Gaya gravitasi dan sentrifugal digabungkan serta gaya coriolis dibiarkan tetap ada. Partikel tanpa gaya dalam suatu bidang maka sesuai Hukum Newton percepatan dalam kerangka inersianya adalah nol. Dengan percepatan sentrifugal bernilai nol maka komponen kecepatan relatifnya dirumuskan sebagai berikut :

 solusi umum dari persamaan diatas adalah

 dengan *f=2Ω* adalah parameter coriolis dan V adalah *Φ* adalah konstanta sembarang dari integral

Untuk mendapatkan posisi maka persamaan tersebut diintegralkan sehingga,

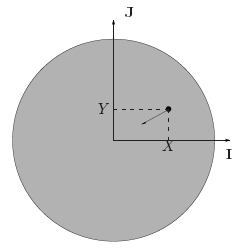


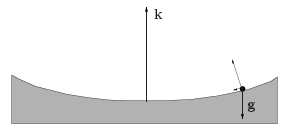
Dengan xo dan yo adalah konstanta hasil integrasi dan merupakan posisi awal partikel. Hubungan x dan y kemudian didapatkan sebagai

Dari persamaan tersebut diketahui bahwa partikel bergerak membentuk lintasan melingkar dengan titik pusat (xo,yo) dan jari-jari V/f. Jika f=0 (tidak ada rotasi) maka jarak tak terhingga dan jika f≠0 (ada rotasi) partikel akan bergerak konstan. Partikel bergerak kekanan (searah jarum jam) jika f positif, dan kekiri (berlawanan arah jarum jam) jika f negative. Dari kedua pernyataan tersebut dapat disimpulkan bahwa partikel akan bergerak berlawanan dengan arah rotasi lingkungan.

1. Analogi dan interpretasi Fisis

Sebuah partikel dengan massa M berada pada bidang gravitasi g dengan permukaan parabola dan elevasi Z dirumuskan sebagai berikut :



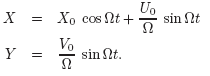


Gambar 3. Tampak samping dan tampak atas benda pada permukaan parabola

Disebabkan permukaan parabola datar apabila dibandingkan jari-jari R maka persamaan gerak diturunkan untuk menjelaskan pergerakan pendulum.



 Frekuensi Ω mengukur kelengkungan dan frekuensi alami osilasi pendulum. Hal yang patut dipertanyakan adalah bagaimana gaya gravitasi berada dalam bentuk negative gaya sentrifugal. Tanpa menghilangkan generalitas posisi awal partikel X = Xo, Y = 0. Partikel dengan kecepatan awal  diluncurkan dari lokasi tersebut pada sumbu absolute. Lintasan sumbu absolute dengan mudah ditemukan sebagai :



Catatan penting dari solusi diatas adalah saat nilai awal murni pemindahan jari-jari (Vo = 0). Partikel selalu berosilasi sepanjang sumbu Y. Kondisi luar biasa lainnya adalah partikel dapat memberikan besar kecepatan azimuth awal yang menyebabkan gaya sentrifugal kearah luar lingkaran membatalkan gaya dorong gravitasi yang masuk pada jarak jari-jari :



1. Percepatan rotasi 3D di planet

Dalam menyederhanakan penjelasan maka bumi diasumsikan berbentuk sempurna. Gambar 4 merupakan kerangka coordinat Cartesian yang umum digunakan. Sumbu x, y dan z pada bidang Cartesian masing-masing bergerak kearah timur, utara dan atas. Dalam bidang ini vector rotasi bumi dirumuskan sebagai :

  percepatan absolute dikurangi komponen sentrifugal.

Gambar 4. Bidang Kerangka Cartesian

memiliki tiga komponen, yaitu



x, y, dan z dimanapun selalu lurus menuju timur, utara dan atas. Arah dari ketiga sumbu tersebut vertical dengan system koordinat curvelinier. Penambahan komponen dilakukan sebagai tindakan terhadap percepatan relative, sehingga :



Dengan f sebagai parameter coriolis dan f\* sebagai parameter timbale balik coriolis. F bergerak ke positif di utara, ke negatif di selatan dan nol di ekuator sedangkan f\* bergerak positfif di belahan bumi utara dan selatan dan lenyap di kutub.

Secara horizontal gerak tanpa gaya dirumuskan sebagai :



1. Pendekatan numeric untuk gerak osilasi



Metode euleur orde 1 untuk memecahkan persamaan diatas adalah,



Bentuk lainnya adalah



Kesalahan dari metode euler dijelaskan dengan menggunakan deret taylor berikut ini:





Bentuk lain dari persamaan diatas adalah



Sisi bagian kanan dikenal sebagai kesalahan pemotongan orde 1.

1. Konvergensi dan stbilitas numeric

Metode beda hingga yang digunakan harus memenuhi criteria stabilitas dan konvergensi. Konvergensi memiliki artian bahwa solusi yang dihasilkan adalah stabil dan konsisten. stabil sendiri memiliki arti kesalahan metode tersebut tidak membesar dengan bertambahnya waktu.

* 1. definisi stabil secara metematik

secara matematik nilai kesalahan metode numeric pada waktu berikutnya hanya diperbolehkan menyebar pada titik-titik tertentu.

* 1. stabilitas lebih ketat

untuk system dengan adanya fungsi integral maka kesalahan yang didapatkan tidak boleh bertambah

* 1. Pemilihan criteria stabilitas

1. Metode Prediktor dan Korektor

Dengan menggunakan metode yang relative sama dengan sub-bab 2.6 maka persamaan tak linier

Dapat diseleseikan. Untuk penyederhanaan u merupakan variable scalar tetapi memiliki perpanjangan terhadap x. dengan x = (u,v). metode sebelumnya yang digunakan adalah

Metode eksplisit euler



Metode implicit euler



Metode semi implicit euleur



Dengan menggunakan fungsi integrasi maka akan didapatkan persamaan



Dari persamaan terakhir ini terdapat sebuah siklus. Nilai Qn+1 dicari dengan menghitung nilai u terlebih dahulu. Nilai un+1 dihitung dengan menggunakan nilai Qn+1. Untuk menyeleseikan permasalahan ini maka digunakan persamaan



Dengan u\* adalah nilai dugaan awal. Nilai ideal didapatkan apabila nilai u\* sangat dekat dengan un+1(skema implicit). Dengan menggunakan pendekatan eksplisit maka akan didapatkan



Persamaan diatas dikenal sebagai metode Heun yang termasuk ke dalam metode prediktor-kolektor.

1. Skema order lebih tinggi

Orde-accuray dapat ditingkatkan dengan memasukan titik antara tn dan tn+1 atau menggunakan Q dengan nilai n-2 atau n-3. Cara pertama dikenal sebagai metode range-kutta dan metode kedua dikenal sebagai metode multi-step.

Metode range-kutta dengan menggunakan satu titik pertengahan (tn+1/2) mendapatkan persamaan sebagai berikut :



**Daftar pustaka**

Cushman-Roisin B., and Jean-Marie B., (2010): Introduction to Geophysical Fluid Dynamics., Prentice-Hall, 320 pages

Schwind, J.V., (2010): Geophysical Fluid Dynamics for Oceanographers., Prentice-Hall, 307 pages.